E.N.S. SAINT-CLOUD FONTENAY

OPTION SCIENCES PHYSIQUES.MATH 2

Les deux premières parties sont indépendantes. La partie III utilise des résultats établis dans la deuxième partie; cependant on pourra l'aborder sans les avoir complètement démontrés. Dans les questions III.4 et III.5, on utilise la notion de stabilité définie dans la partie I.

I

On dit qu'une série à termes complexes $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ est *absolument convergente* si les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_{-n}|$ sont convergentes. On appelle alors *somme de la série* le nombre $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.

On appelle *série trigonométrique* toute série de la forme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, où les c_n sont des nombres complexes. Dans toute la suite, la même lettre sera reprise pour désigner une série trigonométrique donnée, sa somme et ses coefficients : ainsi c désigne la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, et sa somme est $c(x)$.

On désigne par E l'espace vectoriel des séries trigonométriques absolument convergentes pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. *a.* Montrer que si c appartient à E, alors $c(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π.

   b. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a $c_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c(x) e^{-ipx} dx$.

2. *a.* Montrer que l'on définit une norme sur E en posant $\|c\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$.

   b. Montrer que pour tout $c \in E$ on a $\sup_{x \in \mathbb{R}} |c(x)| \leqslant \|c\|$.

Dans toute la suite, a désigne un polynôme trigonométrique : $a(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$, les a_n étant des nombres complexes : c'est évidemment un élément de E.

3. *a.* Montrer que si c appartient à E, alors il existe un unique $d \in E$ tel que $d(x) = a(x)\,c(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et de plus $\|d\| \leqslant \|a\|\,\|c\|$.

   b. Montrer que l'application A qui à tout $c \in E$ associe $Ac \in E$ tel que $(Ac)(x) = a(x)\,c(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, est linéaire continue de E dans E, et calculer sa norme.

4. *a.* Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$ il existe des nombres complexes $a_{k,n}$ tels que la puissance $k^{\text{ième}}$ de $a(x)$ s'écrive :

$$a^k(x) = \sum_{n=-kN}^{kN} a_{k,n} e^{inx}.$$

   b. Prouver que $\|a^k\| \leqslant (2kN+1) \sup_{x \in \mathbb{R}} |a^k(x)|$.

   En déduire que la limite de $\|a^k\|^{1/k}$ quand k tend vers $+\infty$ existe et est égale à $\sup_{x \in \mathbb{R}} |a(x)|$.

5. On revient à l'application linéaire continue A de E dans E définie au 3.*b*. On dit que A est *stable* s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $c \in E$ on ait $\|A^k c\| \leqslant C\,\|c\|$, où $A^k = A \circ A \circ \ldots \circ A$ (k fois).

   a. Montrer que si $a(x) = a_p e^{ipx}$ (un seul terme non nul) avec $|a_p| = 1$ alors A est stable.

   b. Montrer que si $|a(x)| < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors A est stable.

   c. Montrer que s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $|a(x)| > 1$ alors A n'est pas stable.

II

Dans cette partie, on démontre quelques résultats qui seront utilisés dans la troisième partie.

1. Soit $[r, s]$ un segment de $\mathbb{R}$, et soit f une fonction de classe C^2 sur $[r, s]$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que $|f'(t)| \geqslant K$ pour tout $t \in [r, s]$, et que de plus $f''(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [r, s]$.

Tournez la page S. V. P.

En intégrant par parties l'intégrale $\int_r^s \frac{1}{f'(t)} \cos f(t)\, f'(t)\, dt$, établir que $\left| \int_r^s \cos f(t)\, dt \right| \leqslant \frac{4}{K}$.

2. Soit $[u, v]$ un segment de $\mathbb{R}$, et soit f une fonction de classe C^2 sur $[u, v]$ à valeurs réelles. On suppose cette fois qu'il existe $M > 0$ tel que $f''(t) \geqslant M$ pour tout $t \in [u, v]$.

a. On suppose $f'(u) \geqslant 0$. Montrer que pour tout $t \in \left[u + \frac{2}{\sqrt{M}}, v\right]$ on a $|f'(t)| \geqslant 2\sqrt{M}$. En déduire que :

$$\left| \int_u^v \cos f(t)\, dt \right| \leqslant \frac{4}{\sqrt{M}}.$$

b. Traiter de même le cas où $f'(v) \leqslant 0$.

c. On suppose $f'(u) f'(v) < 0$. Montrer qu'il existe $w \in]u, v[$ tel que $f'(w) = 0$. En déduire que

$$\left| \int_u^v \cos f(t)\, dt \right| \leqslant \frac{8}{\sqrt{M}}.$$

3. Soient β un nombre réel, q un polynôme à coefficients réels tel que $q(0) \neq 0$ et l un entier $\geqslant 2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi_{k,\beta}(x) = \int_0^x \cos(\beta t + k t^l q(t))\, dt.$$

On note $\rho = \frac{l(l-1)}{2} |q(0)|$.

a. Prouver qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [0, \delta]$ on a

$$\left| \frac{d^2}{dt^2} (t^l q(t)) \right| \geqslant \rho t^{l-2}.$$

b. On suppose $k > \frac{1}{\delta^l}$. Établir que pour tout $x \in \left[\frac{1}{\sqrt[l]{k}}, \delta\right]$ on a :

$$\left| \int_{\frac{1}{\sqrt[l]{k}}}^x \cos(\beta t + k t^l q(t))\, dt \right| \leqslant \frac{8}{\sqrt{\rho}\sqrt[l]{k}}.$$

c. En déduire qu'il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de k et de β telle que, pour tout $x \in [0, \delta]$, on a $|\varphi_{k,\beta}(x)| \leqslant \frac{C_1}{\sqrt[l]{k}}$.

Avec les notations de cette question, on pose

$$\psi_{k,\beta}(x) = \int_0^x \sin(\beta t + k t^l q(t))\, dt;$$

on *admettra* qu'il existe une constante $C_2 > 0$ indépendante de k et de β telle que pour tout $x \in [0, \delta]$ on a $|\psi_{k,\beta}(x)| \leqslant \frac{C_2}{\sqrt[l]{k}}$.

4. Soit h une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$, à valeurs réelles, telle que $h(0) = 1$ et $|h(x)| < 1$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ tel que $x \neq 0$. On suppose qu'il existe un réel $\mu > 0$, un entier pair $m > 0$ et une fonction $\varepsilon(x)$ définie au voisinage de 0, tendant vers 0 si x tend vers 0, tels que, au voisinage de 0, on ait

$$h(x) = e^{-\mu x^m}(1 + \varepsilon(x)).$$

a. Établir la convergence de l'intégrale

$$J(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu y^m}\, dy, \qquad (\nu > 0).$$

b. Montrer que $J(\nu)$ est une fonction continue de ν sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer que, pour tout $\sigma > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{-\eta}^{\eta} e^{-k\mu x^{m(1+\sigma)}}\, dx \leqslant \int_{-\eta}^{\eta} h(x)^k\, dx \leqslant \int_{-\eta}^{\eta} e^{-k\mu x^{m(1-\sigma)}}\, dx.$$

d. Grâce au changement de variables $y = x\sqrt[m]{k}$, en déduire que

$$J(\mu) = \lim_{k \to \infty} \sqrt[m]{k} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)^k\, dx.$$

III

Soit $a(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$ un polynôme trigonométrique. On suppose que $a(0) = 1$ et que $|a(x)| < 1$ pour tout $x \in]0, 2\pi[$.

Tournez la page S. V. P.

Page 48 1986 ENS Saint-Cloud--Fontenay Option Sciences physiques.Math 2

Dans toute cette partie, on suppose que $a(x)$ possède la propriété suivante : il existe un réel α, deux entiers l et m tels que $1 < l < m$, m étant pair, un polynôme $q(x)$ à coefficients réels tel que $q(0) \neq 0$, un réel γ strictement positif et une fonction $\varepsilon(x)$ définie et de classe C^1 au voisinage de 0, vérifiant $\varepsilon(0) = 0$, tels que, au voisinage de 0, on ait

$$a(x) = e^{i\alpha x + ix^l q(x) - \gamma x^m (1+\varepsilon(x))}.$$

On se propose de démontrer que l'application A définie au I n'est pas stable.

1. *a.* On pose $b(x) = e^{-i\alpha x - ix^l q(x)}\, a(x)$. Soit $\eta_1 \in]0, \pi[$ tel que $|\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ si $|x| \leqslant \eta$. En considérant successivement les intervalles $[-\eta, \eta]$, $[-\pi, -\eta]$ et $[\eta, \pi]$, montrer qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ on ait $|b(x)| \leqslant e^{-\lambda x^m}$.

   b. Montrer qu'il existe une fonction $\varepsilon_1(x)$ définie et continue au voisinage de 0, telle que $\varepsilon_1(0) = 0$ et telle que, au voisinage de 0, on ait

$$b'(x) = -m\gamma x^{m-1}(1 + \varepsilon_1(x)).$$

   En déduire qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ on ait $|b'(x)| \leqslant C_3 |x|^{m-1}$.

2. *a.* À l'aide d'une intégration par parties et des résultats du II.3.*c.* et du III.1°, montrer qu'il existe $\delta \in]0, \pi[$ et une constante $C_4 > 0$ indépendante de n et k telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on ait

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} \varphi'_{k, \alpha k - n}(x)\, (b(x))^k \, dx \right| \leqslant \frac{C_4}{\sqrt[l]{k}},$$

   où la fonction $\varphi_{k, \alpha k - n}$ a été définie au II.

   b. Établir directement le même résultat pour

$$\left| \int_{\delta}^{\pi} \varphi'_{k, \alpha k - n}(x)\, (b(x))^k \, dx \right|.$$

   c. En déduire qu'il existe une constante $C_5 > 0$ indépendante de n et k telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $n \in [-k\,\mathrm{N}, k\,\mathrm{N}]$, on ait $|a_{k,n}| \leqslant \frac{C_5}{\sqrt[l]{k}}$.

3. *a.* Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{n=-k\mathrm{N}}^{k\mathrm{N}} |a_{k,n}|^2 \leqslant \left(\max_{-k\mathrm{N} \leqslant n \leqslant k\mathrm{N}} |a_{k,n}| \right) \cdot \sum_{n=-k\mathrm{N}}^{k\mathrm{N}} |a_{k,n}|.$$

   b. En déduire qu'il existe une constante $C_6 > 0$ indépendante de k telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on ait

$$\| a^k \| \geqslant C_6\, k^{\frac{1}{l} - \frac{1}{m}}.$$

   c. Montrer que l'opérateur A défini au I n'est pas stable.

4. Soit ξ une constante réelle telle que $|\xi| < 1$. On pose

$$a(x) = \xi^2 \cos x - i\,\xi \sin x + 1 - \xi^2.$$

   Montrer que l'application A associée à $a(x)$ définie au I n'est pas stable.

   On admettra que l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $Z = e^z - 1$ admet une application réciproque L(Z), définie et de classe C^∞ au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, telle que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on ait

$$L(Z) = Z - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{3} - \ldots + (-1)^{p-1} \frac{Z^p}{p} (1 + \varepsilon(Z))$$

   où $\varepsilon(Z)$ tend vers zéro avec Z.